Maximum likelihood estimation af simpel state space model

Peter Stephensen og Maria Andreasen, DREAM

October 28, 2018

Vi opstiller et simpelt eksempel på en state space model. Det vises hvorledes ML-estimater udledes, og det demonstreres at vi ved at tilføje en varians-restriktion (hvilket er almindelig praksis) gør det muligt at finde en analytisk løsning. Afslutningsvis udledes Kalman-smoothing.

Betragt for $t \geq 0$ local level modellen

$$y_t = m_t + \varepsilon_t \tag{1}$$
$$m_t = m_{t-1} + \varepsilon_t^{\mu}, \tag{2}$$

hvor $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(\prime, \nu)$, $\varepsilon_t^{\mu} \sim \mathcal{N}(\prime, \nu_\mu)$ og y_t er observeret data. Desuden er $\mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}_0, P_1)$ hvor $P_1 \to \infty$. Man kan tænke på dette som en dekomponering af y_t i en strukturel del μ_t og en konjunkturel del ε_t : Vi tilføjer den typiske varians-restiktion:

$$\nu = \lambda \nu_\mu$$

Dette gør man for at sikre sig at ν_t fanger struktur og at ε_t fanger konjunktur. I et HP-filter antages det fx at $\lambda = 100$: Antagelsen om at $\mu_0 \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}_0, P_1)$ for $P_1 \to \infty$ er den såkaldte 'diffuse prior'. For given værdi af ν_μ og λ kan vi Kalman-filtrere modellen (1)-(2) med proceduren:

$$\begin{aligned}
\theta_t &= y_t - m_t \\
F_t &= P_t + \lambda \nu_\mu \\
K_t &= \frac{P_t}{F_t} \\
m_{t+1} &= m_t + K_t \theta_t \\
P_{t+1} &= P_t + \nu_\mu - K_t^2 F_t
\end{aligned}$$

Processen initialiseres af betingelserne (følger af diffuse prior)

$$\begin{aligned}
m_1 &= y_1 \\
P_1 &= \nu_\mu + \nu = (1 + \lambda) \nu_\mu
\end{aligned}$$

Processen kan simplificeres betydeligt:

$$m_{t+1} = \frac{\lambda\nu_\mu}{F_t} m_t + \frac{F_t - \lambda\nu_\mu}{F_t} y_t \tag{3}$$

$$F_{t+1} = \left(1 - \left(\frac{F_t - \lambda\nu_\mu}{F_t}\right)^2\right) F_t + \nu_\mu \tag{4}$$

Med initialbetingelserne

$$m_1 = y_1$$
$$F_1 = (1 + 2\lambda)\nu_\mu$$

Definer

$$\hat{F}_t \equiv \frac{F_t}{\nu_\mu}$$

Vi kan omskrive (4) til

$$\hat{F}_{t+1} = \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\hat{F}_t}\right)^2\right) \hat{F}_t + 1 \tag{5}$$

med bibetingelsen

$$\hat{F}_1 = 1 + 2\lambda$$

Denne differensligning kan beregnes og herefter kan vi beregne m_t ud fra:

$$m_{t+1} = \frac{\lambda}{\hat{F}_t} m_t + \left(1 - \frac{\lambda}{\hat{F}_t}\right) y_t \tag{6}$$

og initialbetingelsen

$$m_1 = y_1 \tag{7}$$

Vi er nu klar til at udføre Kalman-smoothing. Vi ønsker at beregne

$$\hat{\mu}_t = E[\mu_t|(y_0, ..., y_T)']$$

Dette gøres ved en 'baglænsberegning'. Start med at definere $r_T = 0$: Herefter gælder:

$$r_{t-1} = \frac{\theta_t}{F_t} + (1 - K_t) r_t$$

og

$$\hat{\mu}_t = m_t + P_t r_{t-1}$$

Denne proces kan omskrives til

$$r_{t-1} = \frac{1}{\hat{F}_t}\left(\frac{y_t - m_t}{\nu_\mu} + \lambda r_t\right) \tag{8}$$

$$\hat{\mu}_t = m_t + \nu_\mu(\hat{F}_t + \lambda)r_{t-1} \tag{9}$$

Lad os til sidst se på ML-estimationen af ν_μ for given λ: Det gælder at

$$\begin{aligned} LL &= -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\log(F_t) + \frac{(y_t - m_t)^2}{F_t}\right) \\ &= -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\log(\nu_\mu \hat{F}_t) + \frac{1}{\hat{F}_t}\frac{(y_t - m_t)^2}{\nu_\mu}\right) \end{aligned}$$

Vi har derfor at

$$\frac{\partial LL}{\partial \nu_\mu} = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\nu_\mu} - \frac{1}{\hat{F}_t}\frac{(y_t - m_t)^2}{\nu_\mu^2}\right) = 0$$

således at

$$\hat{\nu}_\mu = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t - m_t)^2}{\hat{F}_t} \tag{10}$$

Der udføres smoothing på en given serie $(y_0, ..., y_T)'$ ved:
1. Filtrering: $\hat{F}_t$ og m_t beregnes.
2. ML-estimation: ν_μ beregnes ud fra (8).
3. Smoothing: Udføres ved hjælp af (6) og (7).