Danish Research institute for
Economic Analysis and Modelling

REFORM modellen

Peter Stephensen, Christoffer Huss, Ralph Bøge Jensen, Grane Høegh og Peter Bache

Dokumentationsnotat
13. maj 2019

www.dreamgruppen.dk

REFORM-modellen*

Peter Stephensen, Christoffer Huss,

Ralph Bøge Jensen, Grane Høegh og Peter Bache (version 17)

13. maj 2019

1 Indledning

DREAM's model REFORM en en statisk multisektor-CGE-model for en lille åben økonomi. REFORM er kalibreret til at ramme et konjunkturrenset basisår. Modellen rummer mulighed for at vælge mellem to forskellige aggregeringsniveauer for brancherne i økonomien. Det første og mest aggregerede niveau har samme brancheindeling som ADAM, dog med private tjenester splittet op i internationalt konkurrenceudsatte og hjemmemarkedsorienterede serviceerhverv. Det andet og mest disaggregerede niveau følger i store træk nationalregnskabets 69-gruppering. Den eneste forskel på de to versioner er detaljeringsniveauet i brancheopsplitningen, så denne dokumentation er dækkende for begge versioner.

De enkelte brancher har CES-produktionsfunktioner med input af materialer fra de andre brancher (indenlandske og udenlandske), bygningskapital, maskinkapital, energi (input fra forsyningsbrancerne) og arbejdskraft. Begge typer kapital er opbygget af investeringer, der i den

*Dette er en dokumentation af modellen som den forelå 13/5-2019.

enkelte branche er et CES-aggregat af danske og udenlandske varer. REFORM indeholder desuden et detaljeret afgifts- og subsidiesystem, hvor blandt andet produktskatterne er delt op på 19 forskellige arter og produktsubsidierne er delt op på 4 arter for hver branche.

Forbrugerne kan opdeles i to grupper; beskæftigede og ikke-beskæftigede. Beskæftigede har nytte af forbrug og fritid, og vælger arbejdstid endogent. Ikke-beskæftigede har kun nytte af forbrug. Forbrugerne modtager løn eller understøttelse samt afkast på deres aktiver. Forbrugets fordeling på indenlandske og udenlandske varer er defineret ved et nestet CES-forbrugssystem, hvis parametre er baseret på eksterne analyser og kalibrering.

Der er udledt et konsistent EV-mål i modellen, således at velfærdsanalyser kan foretages.

Modellen er gjort statisk ved at betragte steady-state i en dynamisk model med Ramsey-forbrugere. Dette gør at formuedelen er klart bedre beskrevet end hvad man typisk ser i statiske CGE-modeller. Modellen medregner f.eks. effekter der kommer fra ændrede danske aktiekurser, via en realistisk antagelse om, at kun en andel af danske aktier ejes af danskere. Dermed tages også højde for, at en del af selskabsskatteprovenuet består af profit, som ellers ville tilfalde udlandet.

2 Model

2.1 Virksomhederne

Modellen har 13 overordnede brancher, der svarer til ADAMs brancher dog med serviceerhvervene (qz) opsplittet i internationalt konkurrenceudsatte og hjemmemarkedsorienterede serviceerhverv. Denne opsplitning følger Produktivitetskommissionens definition. De 13 overordnede

a	landbrug mv.
b	anlægs- og byggebranchen
e	råstofindvinding
ne	energiforsyning
ng	olieraffinaderier
nf	nærings- og nydelsesmiddelindustrien
nz	fremstilling, ekskl. ne, nf og ng
qz_i	hjemmemarkedsorienterede serviceerhverv
qz_k	internationalt konkurrenceudsatte serviceerhverv
qf	finansiel virksomhed
qs	søtransport
h	boligbenyttelse
o	offentlige tjenester

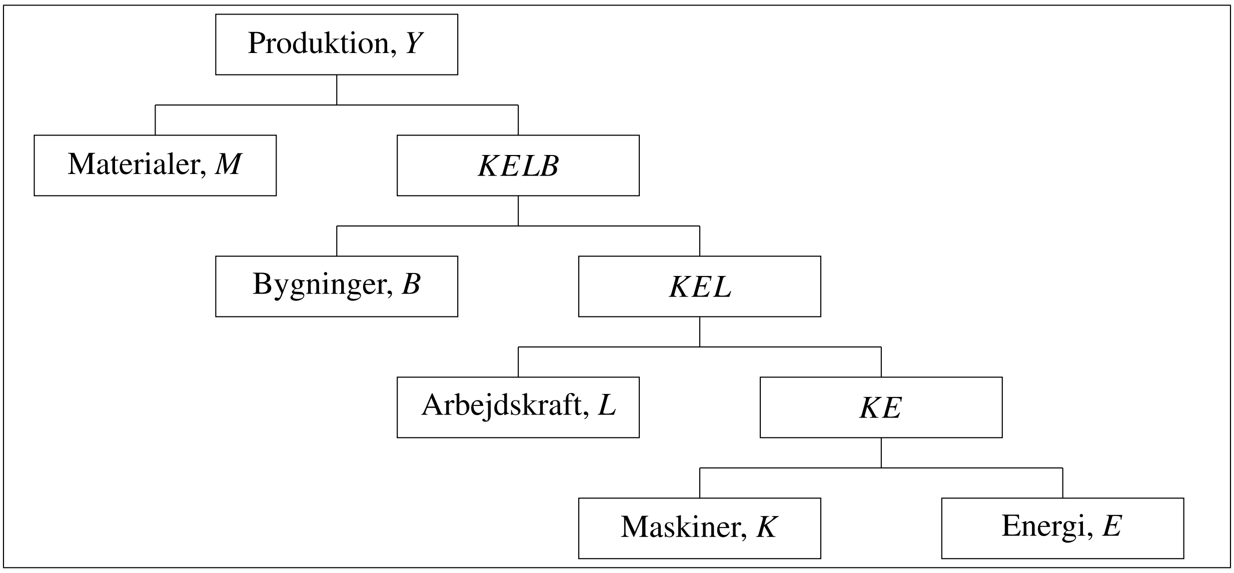
Tabel 1: De 13 overordnede brancher i REFORM

brancher kan ses i tabel 1. I udgaven med en mere detaljeret brancheopsplitning er disse 13 brancher yderligere opsplittet med udgangspunkt i nationalregnskabets 69-gruppering. Endvidere er råstofindvinding og energiforsyning yderligere opsplittet, således at det samlede antal brancher i denne udgave af modellen bliver 73. Alle brancher producerer potentielt til seks anvendelser. Disse omfatter privatforbrug, offentligt forbrug, investeringer i henholdsvis maskin- og bygningskapital, lagerinvesteringer og eksport. I produktionen benyttes fem overordnede faktorer: et aggregat af materialeinputs, bygningskapital, arbejdskraft, maskinkapital og et aggregat af energi. Energiaggregatet omfatter inputs fra brancherne energiforsyning (ne) og olieraffinaderier (ng), mens materialeaggregatet omfatter inputs fra alle øvrige brancher.

Produktionens intensitet i de fem overordnede faktorer, samt sammensætningen af investeringer varierer på tværs af brancher. Produktionsfunktionens overordnede struktur er derimod ens på tværs af brancher. Den overordnede struktur (nestingstrukturen) skitseres i det følgende delafsnit.

2.1.1 Produktionsfunktionens nesting-struktur og faktorefterspørgslen

Efterspørgselssystemet for produktionsfaktorerne er udledt fra KELBM-CES-produktionsfunktioner under imperfekt konkurrence. I produktionen i branche j indgår, som nævnt i forrige delafsnit, et materialeaggregat, M_j, bygningskapital, B_j, arbejdskraft, L_j, energi, E_j, og maskinkapital, K_j. Produktionsfunktionens nesting-struktur er illustreret i figur 2.1. Lagerinvesteringer indgår endvidere i virksomhedernes omkostninger og følger produktionen proportionalt.[1]



Figur 2.1: Produktionsfunktionens nest-struktur i REFORM

I øverste nest bestemmes den j'te branches efterspørgsel efter det branchespecifikke materiale-aggregat M_j med prisen P_j^M og KELB-aggegatet H_j med prisen P_j^H

$$\theta_j^M M_j = \mu_j^{YM} \left(\frac{P_j^M}{\theta_j^M p_j^O} \right)^{-E_j^Y} Y_j$$

[1] Disse er primært med for at ramme BNP i kalibreringsåret. Såfremt man foretrækker det, kan lagerinvesteringerne sættes til nul.

$$H_j = \mu_j^{YH} \left(\frac{P_j^H}{p_j^O} \right)^{-E_j^Y} Y_j$$

hvor Y_j er produktionen i branche j, θ_j^M angiver produktiviteten i materialeforbruget i branche j, mens E'er og μ'er angiver henholdsvis substitutionselasticiteter og andelsparametre fra de relevante CES-funktioner. Optimeringsprisen, p_j^O, der svarer til virksomhedens enhedsomkostninger (bortset fra lagerinvesteringer), kan bestemmes udfra

$$p_j^O Y_j = P_j^M M_j + P_j^H H_j$$

Den faktiske outputpris, p_j, som virksomhederne tager for deres produkt (før anvendelsesspecifikke afgifter såsom moms), er givet ved:

$$p_j = (1 + m_j) p_j^O$$

hvor m_j er markup'en i branche j.

I andet nest bestemmes efterspørgslen efter bygningskapital, B_j, med usercosten P_j^B (se nedenfor) og KEL-aggregatet med prisen P_j^{KEL}, samt prisen på KELB-aggregatet P_j^H:

$$\frac{\gamma_j \theta_j^B B_j}{1+g} = \mu_j^{HB} \left(\frac{(1+\tau_j^{fakB}) P_j^B}{\gamma_j \theta_j^B P_j^H} \right)^{-E_j^H} H_j$$

$$KEL_j = \mu_j^{HKEL} \left(\frac{P_j^{KEL}}{P_j^H} \right)^{-E_j^H} H_j$$

$$P_j^H H_j = \frac{(1+\tau_j^{fakB}) P_j^B B_j}{1+g} + P_j^{KEL} KEL_j$$

Hvor θ_j^B angiver bygningsproduktiviteten, τ_j^{fakB} er produktionsskatten på bygningskapital i branche j og parameteren γ_j er TFP'en i branche j[2]. Bemærk at bygningskapitalen divideres med vækstfremskrivningen $1+g$, da bygningskapital indgår med lag i den dynamiske specifikation af efterspørgselsligningen, der ligger til grund for steady-state efterspørgslen. Se Appendix B for en gennemgang af vækst- og inflationskorrektion.

I tredje nest bestemmes efterspørgslen efter arbejdskraft, L_j, med lønnen w og KE-aggregatet med prisen P_j^{KE}, samt prisen på KEL-aggregatet, P_j^{KEL}

$$\gamma_j \theta_j^L L_j = \mu_j^{LKEL} \left(\frac{(1+\tau_j^{fakL})w}{\gamma_j \theta_j^L P_j^{KEL}} \right)^{-E_j^{KEL}} KEL_j$$

$$KE_j = \mu_j^{KEKEL} \left(\frac{P_j^{KE}}{P_j^{KEL}} \right)^{-E_j^{KEL}} KEL_j$$

$$P_j^{KEL} KEL_j = (1+\tau_j^{fakL}) w L_j + P_j^{KE} KE_j$$

Hvor θ_j^L angiver arbejdskraftens produktivitet og τ_j^{fakL} angiver produktionsskatten på arbejdskraft i branche j. I fjerde nest bestemmes efterspørgslen efter maskinkapital, K_j, med usercosten P_j^K og E-energi-aggregatet med prisen P_j^E, samt prisen på KE-aggregatet P_j^{KE}

$$\frac{\gamma_j \theta_j^K K_j}{1+g} = \mu_j^{KKE} \left(\frac{P_j^K}{\gamma_j \theta_j^K P_j^{KE}} \right)^{-E_j^{KE}} KE_j$$

$$\theta_j^E E_j = \mu_j^{EKE} \left(\frac{P_j^E}{\theta_j^E P_j^{KE}} \right)^{-E_j^{KE}} KE_j$$

[2]TFP parameteren optræder i ligningerne for maskin- og bygningskapital samt arbejdskraft, således at et stød til TFP'en rammer de primære faktorer (BVT).

$$P_j^{KE} KE_j = \frac{P_j^K K_j}{1+g} + P_j^E E_j$$

Hvor θ_j^K og θ_j^E angiver maskinkapitalens og energiens produktivitet.

Usercosten for kapitaltype $k = B, K$ kan udtrykkes som (se Appendix A):

$$P_j^k = \frac{1}{1-\tau_j^{Cor}} \left[(1-\phi_j) \left(r + \delta_j^k \right) + \phi_j \left[\frac{\left(1-\tau_j^{Cor}\right) i - \pi}{1+\pi} + \delta_j^k \right] - \tau_j^{Cor} \delta_j^{k,Book} \frac{r+\delta_j^k}{i+\delta_j^{k,Book}} \right] P_j^{Ik}$$

hvor i er den nominelle rente (givet af det internationale renteniveau), π er inflation, δ_j^k er den økonomiske afskrivningsrate, $\delta_j^{k,Book}$ er den skattemæssige afskrivningsrate, P_j^{Ik} er investeringsprisen (defineret nedenfor), ϕ_j er virksomhedernes gældskvote, τ_j^{Cor} er selskabsskattesatsen og r er realrenten givet ved $r \equiv \frac{i-\pi}{1+\pi}$.

2.1.2 Opsplitning af materiale- og investeringsaggregater

Materialeaggregatet i sektor j udsplittes i input, x_{ji}, fra økonomiens i sektorer (bortset fra energiforsyning). i og j er således indeks, der løber over de samme 69 brancher (73 fraktrukket fire brancher for energi).

$$x_{ji} = \mu_{ji}^x \left(\frac{P_{ji}^x}{P_j^M} \right)^{-E_j^M} M_j$$

$$P_j^M M_j = \sum_i P_{ji}^x x_{ji}$$

Hvert x_{ji} opsplittes derefter på køb fra indenlandske producenter, x_{ji}^{D}, med prisen p_i [3] og import fra udlandet, x_{ji}^{F}, med prisen p_i^F (inden afgifter):

$$x_{ji}^{D} = \mu_{ji}^{xD} \left(\frac{\left(1+\tau_{ji}^{xD}\right) p_i}{P_{ji}^{x}} \right)^{-E_j^x} x_{ji}$$

$$x_{ji}^{F} = \mu_{ji}^{xF} \left(\frac{\left(1+\tau_{ji}^{xF}\right) p_i^F}{P_{ji}^{x}} \right)^{-E_j^x} x_{ji}$$

$$P_{ji}^{x} x_{ji} = \left(1+\tau_{ji}^{xD}\right) p_i x_{ji}^{D} + \left(1+\tau_{ji}^{xF}\right) p_i^F x_{ji}^{F}$$

Hvor τ'er angiver afgifter. Her angives blot en samlet afgift for hver anvendelse for overskuelighedens skyld, hvorimod afgifterne i modellen er splittet op på moms, told og produktafgifter. Produktafgifterne er yderligere opdelt på 19 afgiftsarter og 4 subsidiearter. De specifikke afgifter og subsidier er opgjort i tabel 2 herunder

[3] Prisen på indenlandsk materiale er blot outputprisen, da materialeinput i en sektor netop er output fra andre sektorer.

Produktafgifter
Benzinafgift
Registreringsafgift
Tobaksafgift
Chokolade- og sukkerafgift
Mættet fedt
Øl-, vin- og spiritusafgift
The, kaffe og mineralvand
El-afgift
Visse olieprodukter, herunder diesel
Sten og brunkul mv.
C02-afgift
Råstofafgift
Emballage, affald, mv.
Vandafgift
PSO-afgift
Tinglysningsafgift
Forsikringsafgift
Øvrige afgifter
Produktsubsidier
Transportsubsidie
Elproduktionstilskud
Tilskud til Ve (PSO-afgift)
Øvrige subsidier

Tabel 2: Produktafgifter og produktsubsidier i REFORM

Det antages at investeringerne for kapitaltype $k = B, K$ er givet ved steady-state-relationen:

$$I_j^k = \left(g + \delta_j^k\right) k_j / \left(1 + g\right)$$

hvor g er økonomiens gennemsnitlige vækstrate. Investeringsefterspørgselen udsplittes over alle brancher i (også energiforsyning) ved[4]:

$$I_{ji}^{k} = \mu_{ji}^{Ik} \left(\frac{P_{ji}^{IkI}}{P_{j}^{Ik}} \right)^{-E_{j}^{Ik}} I_{j}^{k}$$

$$P_{j}^{Ik} I_{j}^{k} = \sum_{i} P_{ji}^{IkI} I_{ji}^{k}$$

Dette opsplittes igen på indenlandsk og udenlandsk input:

$$I_{ji}^{kD} = \mu_{ji}^{IkD} \left(\frac{\left(1+\tau_{ji}^{IkD}\right) p_i}{P_{ji}^{IkI}} \right)^{-E_{j}^{IkI}} I_{ji}^{k}$$

$$I_{ji}^{kF} = \mu_{ji}^{IkF} \left(\frac{\left(1+\tau_{ji}^{IkF}\right) p_i^F}{P_{ji}^{IkI}} \right)^{-E_{j}^{IkI}} I_{ji}^{k}$$

$$P_{ji}^{IkI} I_{ji}^{k} = \left(1+\tau_{ji}^{IkD}\right) p_i I_{ji}^{kD} + \left(1+\tau_{ji}^{IkF}\right) p_i^F I_{ji}^{kF}$$

Lagerinvesteringer modelleres, som nævnt, som en omkostningskomponent, der følger produktionen:

$$I_{j}^{L} = \lambda_j Y_j$$

hvor λ_j både kan være positiv og negativ. Lagerinvesteringerne opdeles på indenlandsk og udenlandsk input:

$$I_{j}^{LD} = \mu_{j}^{ILD} \left(\frac{\left(1+\tau_{j}^{ILD}\right) p_j}{P_{j}^{IL}} \right)^{-E_{j}^{IL}} I_{j}^{L}$$

[4]Opsplitningen af investeringsefterspørgslen er strengt taget nestet på samme vis som materialeefterspørgslen. I første nest opsplittes efterspørgslen på 13-grupperingen og i det næste på 73-grupperingen. Se eventuelt gennemgangen af materialeefterspørgslen.

$$I_j^{LF} = \mu_j^{ILF} \left(\frac{\left(1+\tau_j^{ILF}\right) p_j^F}{P_j^{IL}} \right)^{-E_j^{IL}} I_j^L$$

$$P_j^{IL} I_j^L = \left(1+\tau_j^{ILD}\right) p_j I_j^{LD} + \left(1+\tau_j^{ILF}\right) p_j^F I_j^{LF}$$

2.2 Husholdningerne

Der findes to typer husholdninger: Beskæftigede (L) og ikke-beskæftigede (NL). Beskæftigede personer har den disponible indkomst

$$y_L = (1-\tau^w)\, whN_L + (1-\tau^r)\, \frac{N_L}{N_{pop}} \frac{r-g}{1+g} A + sN_L + \frac{N_L}{N_{pop}} \Delta T^C$$

hvor N_L er antal beskæftigede, h er arbejdstiden, τ^w er skatten på arbejdsindkomst, N_{pop} er befolkningens størrelse, A er forbrugernes samlede formue, τ^r er skatten på kapitalindkomst, s er en lumpsum transferering fra staten til husholdninger (således at den offentlige budgetbegrænsning holder med lighedstegn) og ΔT^C er provenuforskellen fra forbrugsafgifter regnet ved marginalsatser og gennemsnitssatser.[5] Ikke-beskæftigede personer har den disponible indkomst

$$y_{NL} = (1-\tau^w)\,(N-N_L)\,\beta w + (1-\tau^r)\, \frac{N_{pop}-N_L}{N_{pop}} \frac{r-g}{1+g} A + (1-\tau^w)\, TR + s\,(N_{pop}-N_L) + \frac{N_{pop}-N_L}{N_{pop}} \Delta T^C$$

hvor $N < N_{pop}$ er arbejdsstyrken, β er kompensationsgraden og TR er transfereringer til husholdningerne (eksl. understøttelse og lumpsum).

[5] På den offentlige saldo optræder kun provenuet fra forbrugsafgifter regnet ved hjælp af gennemsnitssatsen. Da forbrugerpriser regnes med marginalsatsen, skal den resulterende provenuforskel optræde andetsteds i modellen, fx i forbrugernes budgetbegrænsning. Det antages at forbrugerne anser ΔT^C for eksogen. “Tilbagebetalingen” bør nok vejes med de to typers forbrug istedet for deres befolkningsandele (dette er ligemeget, såfremt arbejdsudbuddet er eksogent).

Hvis den strukturelle ledighedsprocent er givet ved u gælder det at

$$N_L = (1-u)N$$

Vi kan enten antage at u er eksogen eller (som i DREAM) at

$$u = u_0 \beta^{\phi}$$

Ligevægt på arbejdsmarkedet indebærer at

$$\sum_j L_j = hN_L$$

hvor arbejdstiden h vælges af de beskæftigede forbrugere.

Transfereringerne er satsreguleret og modelleret ved

$$TR = \eta w \left(N_{pop} - N_L\right)$$

Nyttefunktionen for beskæftigede personer er givet ved:

$$U_L = C_L - \chi^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{h}{\overline{\overline{h}}}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \overline{h} N_L \tag{2.1}$$

hvor forbrugeren vælger sin arbejdstid h. Her er $\overline{h}$ maksimal arbejdstid og χ er en andelsparameter. Forbrugerens budgetrestriktion er givet ved

$$P^C C_L = y_L,$$

eller

$$P^C C_L = (1-\tau^w)\, whN_L + (1-\tau^r)\,\frac{N_L}{N_{pop}}\frac{r-g}{1+g}A + sN_L + \frac{N_L}{N_{pop}}\Delta T^C$$

hvor forbrugerprisindekset P^C er givet nedenfor. Det gælder da at

$$P^C U_L = P^C\left(C_L - \chi^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{h}{\overline{h}}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\overline{h}N_L\right) = \overbrace{\left(P^C C_L\right)}^{=y_L} - P^C\chi^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{h}{\overline{h}}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\overline{h}N_L \Rightarrow$$

$$P^C U_L = \left[(1-\tau^w)\, wh - P^C\chi^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{h}{\overline{h}}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\overline{h}\right]N_L + (1-\tau^r)\,\frac{N_L}{N_{pop}}\frac{r-g}{1+g}A + sN_L + \frac{N_L}{N_{pop}}\Delta T^C$$

Vi maksimerer derfor U_L for givet formue A hvis vi maksimerer udtrykket

$$u(h) = (1-\tau^w)\, wh - P^C\chi\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{h}{\overline{h}}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\overline{h}$$

Dette sker hvis

$$u'(h) = (1-\tau^w)\, w - P^C\chi^{-\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{h}{\overline{h}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0$$

således at

$$h = \chi\left((1-\tau^w)\,\frac{w}{P^C}\right)^{\gamma}\overline{h}$$

Bemærk at dette indebærer at

$$(1-\tau^w)\, wh - P^C\chi^{-\frac{1}{\gamma}}\frac{\gamma}{\gamma+1}\left(\frac{h}{\overline{h}}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\overline{h} = (1-\tau^w)\, wh - \frac{\gamma}{\gamma+1}(1-\tau^w)\, wh$$

således at

$$P^C U_L = y_L - \frac{\gamma}{\gamma+1}whN_L$$

eller

$$U_L = \frac{y_L}{P^C} - u_h$$

hvor

$$u_h \equiv \frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{w}{P^C}hN_L$$

Her er u_h disnytten ved at arbejde .

Konkluderende haves at

$$C_L = \frac{y_L}{P^C}$$

$$h = \chi\left((1-\tau^w)\frac{w}{P^C}\right)^{\gamma}\overline{h}$$

$$U_L = \frac{y_L}{P^C} - u_h$$

Ikke-beskæftigede personer har nyttefunktionen

$$U_{NL} = C_{NL}$$

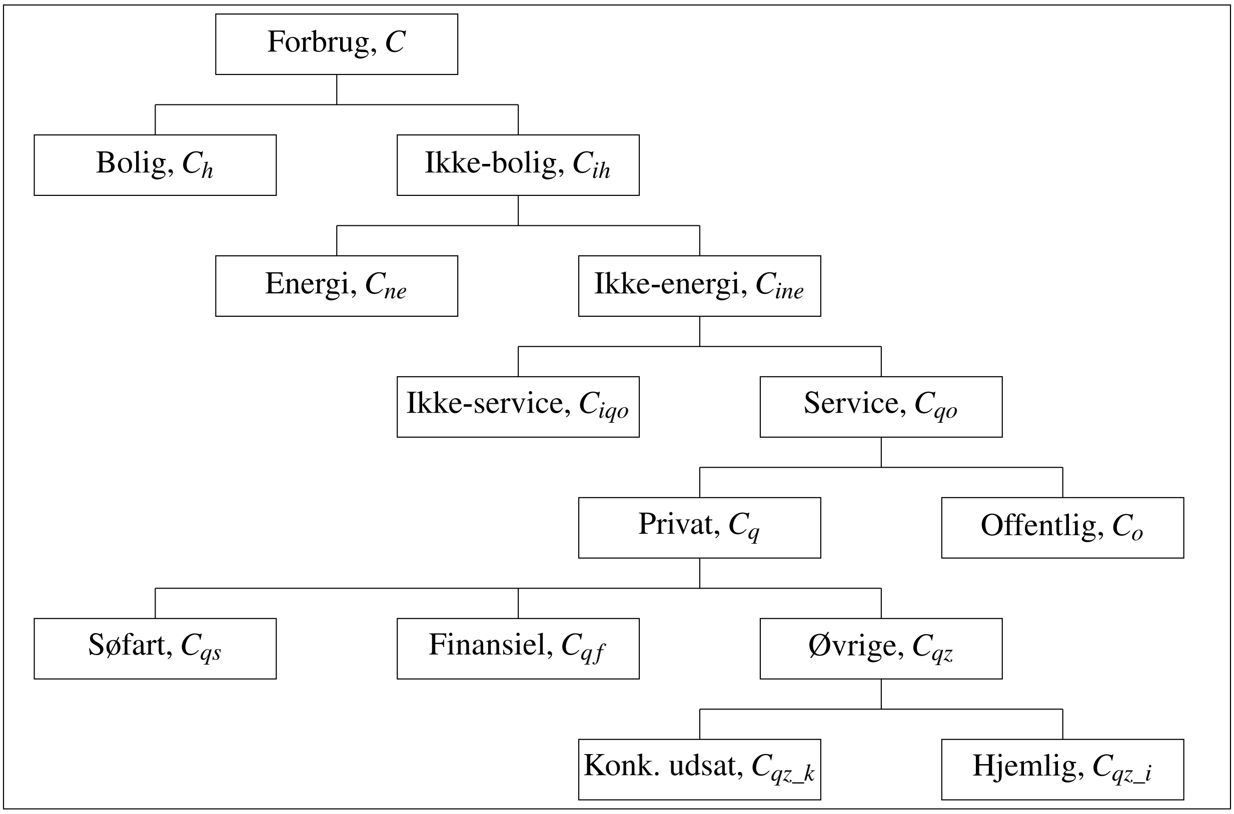
De vælger derfor det forbrug der tilfredsstiller budgetrestriktionen

$$P^C C_{NL} = y_{NL}$$

Det samlede forbrug

$$C = C_L + C_{NL}$$

udsplittes ved hjælp af et nestet efterspørgselssystem analogt til produktionen. Dette gennemgås ikke i detaljer her, men den overordnede nest-struktur er illustreret i figur 2.2. Under energi ligger forbrug fra brancherne energiforsyning (ne) og olieraffinaderier (ng), men ikke-service omfatter landbrug mv. (a), anlægs- og byggebranchen (b), råstofindvinding (e), nærings- og nydelsesmiddelindustri (nf) og fremstilling (nz).



Figur 2.2: Forbrugets nest-struktur i REFORM

2.2.1 Formue

Forbrugernes formue består af indenlandske aktier og anden formue. Denne "anden formue" dækker over indenlandske og udenlandske obligationer (herunder indenlandske stats- og virksomhedsobligationer)[6] og udenlandske aktier. Idet alle formue-typerne har samme nominelle afkast i, behøver vi kun gøre denne skelnen. Det skyldes at værdien af indenlandske aktier typisk springer ved stød til økonomien. Det sker ikke for de andre formue-typer.[7]

Vi skal kende værdien af indenlandske aktier. Virksomhedens værdi i branche j er givet ved

[6] Det antages implicit i nuværende udgave af modellen, at de hjemlige forbrugere holder en eksogen mængde hjemlige statsobligationer samt en eksogen mængde af virksomhedernes gæld. Sidstnævnte betyder, at virksomheder på marginen udelukkende optager gæld i udlandet.

[7] Man kunne overveje at lade husholdningerne holde en fast andel af det offentliges og virksomhedernes gæld. I så fald ville denne formuepost også kunne reagere.

steady-state-relationen:

$$(r-g)V_j/(1+g)=DIV_{jt}$$

hvor dividenten i steady-state antages at være givet ved

$$\begin{aligned}
DIV_j &= \left(1-\tau_j^{Cor}\right)\left(p_jY_j-P_j^MM_j-P_j^EE_j-(1+\tau_j^{fakL})wL_j-\tau_j^{fakB}P_j^BB_j/(1+g)-FakRest_j-iD_j\right)\\
&- \sum_{k=B,K}P_j^{Ik}I_j^k+\tau_j^{Cor}\sum_{k=B,K}\delta_j^{k,Book}K_j^{k,Book}/(1+pg)-P_j^{IL}I_j^L-SubEU_j\\
&+ \frac{pg}{1+pg}D_j
\end{aligned}$$

hvor D_j er branchens gæld og $SubEU_j$ er subsidier fra EU. Bemærk at bogført kapital $K^{k,Book}$ og gælden D begge er værdier (pris $\times$ mængde) og derfor både vækst- og inflationskorrigeres. Det sker ved at dele med $1+pg$ som er defineret ved

$$1+pg\equiv(1+\pi)(1+g)$$

I en dynamisk model er den bogførte kapital givet ved akkumulationsligningen, $k=B,K$

$$K_{jt}^{k,Book}=\left(1-\delta_j^{k,Book}\right)K_{j,t-1}^{k,Book}+P_{jt}^{Ik}I_{jt}^k$$

Vækst- og inflationskorrektion dette fås

$$K_{jt}^{k,Book}=\left(1-\delta_j^{k,Book}\right)K_{j,t-1}^{k,Book}/(1+pg)+P_{jt}^{Ik}I_{jt}^k$$

hvilket i steady state giver

$$\left(g + \frac{\delta_j^{k,Book} + \pi}{1+\pi}\right) K_j^{k,Book} / (1+g) = P_j^{Ik} I_j^k$$

Endogen gældskvote opstår kun i en model med usikkerhed (default risk) eller ad hoc antagelser om ikke-lineære låneomkostninger. Det antages derfor at virksomhederne har en fast gældskvote:

$$D_{jt} = \sum_{k=B,K} \phi_j P_{jt}^{Ik} k_{jt}$$

Vi antager at en andel α_j^V af indenlandske aktier i branche j er ejet af danske husholdninger og at resten er placeret i anden formue. Det gælder derfor at

$$A = \overline{A} + \sum_j \alpha_j^V V_j$$

hvor anden formue $\overline{A}$ er eksogen.

2.3 Den offentlige branche

Den offentlige branche er som udgangspunkt modelleret som en hvilken som helst anden produktionsbranche. Den tilfredsstiller den gældende efterspørgsel ved at producere den offentlige vare med input af materialer, kapital og arbejdskraft. Den antages at omkostningsminimere og overholder derfor de samme førsteordensbetingelser som en privat branche. Det der adskiller den offentlige branche fra en privat branche er derfor bestemmelsen af efterspørgslen. Efterspørgslen efter den offentlige vare vil enten antages at være eksogen eller være bestemt således at et eksogent givet budget overholdes.

Det giver ikke særligt meget mening at antage, at den offentlige branches markup er forskellig fra nul. Det må derfor anbefales enten at sikre dette i kalibreringsantagelsen, eller at ændre markup'en til nul ved et selvstændigt stød.

Vi antager at den offentlige branche lånefinansierer alle sine investeringer (således at gældskvoten ϕ_o er lig 1):

$$D_o = \sum_{k=B,K} P_o^{Ik} k_o,$$

at den ikke betaler selskabsskat:

$$\tau_o^{Cor} = 0$$

samt at den offentlige branches lagerinvesteringer er nul. I den offentlige branche er "dividenden" dermed givet ved:

$$DIV_o = p_o Y_o - P_o^M M_o - P_o^E E_o - wL_o - \sum_{k=B,K} P_o^{Ik} I_o^k - (r-g) D_o / (1-g)$$

Det gælder derfor at user-cost i den offentlige branche er givet ved

$$P_o^k = \left(r + \delta_o^k\right) P_o^{Ik}$$

Da det i steady state gælder at

$$I_o^k = \left(g + \delta_o^k\right) k_o / (1+g)$$

har vi at

$$\begin{aligned}
DIV_o &= p_oY_o - P_o^M M_o - P_o^E E_o - wL_o - \sum_{k=B,K} P_o^{Ik}\left(g+\delta_o^k\right)k_o/(1+g) - \sum_{k=B,K}(r-g)P_o^{Ik}k_o/(1-g) \\
&= p_oY_o - P_o^M M_o - P_o^E E_o - wL_o - \sum_{k=B,K} P_o^{Ik}(r+\delta_o)k_o/(1+g) \\
&= p_oY_o - P_o^M M_o - P_o^E E_o - wL_o - \sum_{k=B,K} P_o^{k}k_o/(1+g) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Det sidste lighedstegn gælder kun hvis markup'en er nul. Det vil vi derfor antage at den er.

Hvis dividenterne DIV_o i den offentlige branche er nul, gælder det ligeledes for værdien af aktier er nul:

$$V_o = 0.$$

Der defineres en primær saldo ud fra indtægter og udgifter. Modellen lukkes typisk ved at antage balanceret saldo og endogenisere en eller anden skattesats eller overførsel.

Den primære saldo er givet ved

$$
\begin{aligned}
S^P &= \sum_i \sum_j \tau_{ji}^{xD} p_i x_{ji}^D + \sum_i \sum_j \tau_{ji}^{xF} p_i^F x_{ji}^F \\
&+ \sum_{k=B,K} \sum_i \sum_j \tau_{ji}^{IkD} p_i I_{ji}^{kD} + \sum_{k=B,K} \sum_i \sum_j \tau_{ji}^{IkF} p_i^F I_{ji}^{kF} \\
&+ \sum_i \sum_j \tau_{ji}^{ILD} p_i I_{ji}^{LD} + \sum_i \sum_j \tau_{ji}^{ILF} p_i^F I_{ji}^{LF} \\
&+ \sum_i \tau_i^{CD} p_i c_i^D + \sum_i \tau_i^{CF} p_i^F c_i^F \\
&+ \sum_i \tau_i^{GD} p_i g_i^D + \sum_i \tau_i^{GF} p_i^F g_i^F \\
&+ \sum_i \tau_i^{XD} p_i X_i^D + \sum_i \tau_i^{XF} p_i^F X_i^F \\
&+ \sum_i \tau_i^{Cor} \Bigg(p_i Y_i - P_i^M M_i - P_i^E E_i - (1 + \tau_i^{fakL}) w L_i - \tau_i^{fakB} P_i^B B_i / (1+g) - FakRest_i - \sum_{k=B,K} \delta_i^{k,Book} K_i^{k,Boo} \\
&+ \sum_i \tau_i^{fakL} w L_i + \tau_i^{fakB} P_i^B B_i / (1+g) + FakRest_i \\
&+ \tau_w \left(whN_L + (N - N_L) \beta w + TR \right) \\
&+ \tau_r (r - g) A / (1+g) \\
&- (N - N_L) \beta w - TR - \sum_j P_i^G G_i - sN_{pop}
\end{aligned}
$$

hvor c_i^D og c_i^F angiver privat forbrug af henholdsvis indenlandsk og udenlanske producerede varer fra branche i, g_i^D og g_i^F angiver offentligt forbrug af henholdsvis indenlandsk og udenlanske producerede varer fra branche i, X_i^D angiver indenlandske varer eksporteret fra branche i og X_i^F angiver import til reeksport i branche i. Herunder redegøres linje for linje for indholdet i den primære saldo:

1. Skatteprovenuet fra virksomhedernes forbrug af henholdsvis indenlandsk- og udenlandsk produceret halvfabrikata til produktion.

2. Skatteprovenuet fra henholdsvis indenlandsk- og udenlandsk producerede investerings-

goder fordelt på de to kapitaltyper.

3. Skatteprovenuet fra indenlandsk- og udenlandsk producerede lagerinvesteringer.
4. Skatteprovenuet fra privatforbrug af indenlandsk- og udenlandsk producerede varer.
5. Skatteprovenuet fra det offentliges køb af indenlandske og udenlandske varer og tjenesteydelser.
6. Skatteprovenuet fra eksport af indenlandsk- og udenlandsk producerede varer.
7. Selskabsskatteprovenu.
8. Skatteprovenuet fra faktorbeskatning, i.e beskatning af arbejdskraft, bygningskapital og faktorrestafgifter.
9. Skatteprovenuet fra beskatning af lønindkomst, arbejdsløshedsunderstøttelse og transfereringer.
10. Skatteprovenuet fra beskatning af formue.
11. De offentlige udgifter som er arbejdsløshedsunderstøttelse, transfereringer, offentligt forbrug og en eventuel lumpsum overførsel til husholdningerne.

Saldoen er i en dynamisk model givet ved

$$D_t^G = (1+i)\,D_{t-1}^G - S_t^P$$

Lad os antage at vi er i en steady state med konstant inflation, således at

$$D_t^G = (1+g)\,(1+\pi)\,D^G$$

og

$$S_t^P = (1+g)(1+\pi)S^P$$

Det gælder da at

$$D^G(1+g)^t(1+\pi)^t = (1+i)D^G(1+g)^{t-1}(1+\pi)^{t-1} - S^P(1+g)^t(1+\pi)^t$$

hvilket reducerer til

$$S^P = (r-g)D^G/(1+g) \tag{2.2}$$

Den offentlige branche vil typisk blive lukket ved gældsantagelsen:

$$D^G = 0$$

Det offentlige forbrug af varer fra branche j er defineret ved aggregatet G_j. Her antages det typisk, at det offentlige forbrug er en fast andel, η_j^G, af bruttoværditilvæksten

$$P_i^G G_i = \eta_i^G BVT_i$$

eller at det offentlige er givet ved et eksogent (politisk bestemt) niveau $\bar{G}_j$

$$G_i = \overline{G}_i$$

Dette aggregat splittes ud på indenlandske og udenlandske varer ved:

$$g_i^D = \mu_i^{GD}\left(\frac{\left(1+\tau_i^{GD}\right)p_i}{P_i^G}\right)^{-E^G} G_i$$

$$g_i^F = \mu_i^{GF} \left(\frac{\left(1+\tau_i^{GF}\right) p_i^F}{P_i^G} \right)^{-E^{CC}} G_i$$

$$P_i^G G_i = \left(1+\tau_i^{GD}\right) p_i g_i^D + \left(1+\tau_i^{GF}\right) p_i^F g_i^F$$

2.4 Udlandet

Det antages at udlandet efterspørger de danske varer via Armington eksport-relationer:

$$X_j = \kappa_j \left(\frac{p_j}{p_j^F} \right)^{-E_j^X}$$

Det er muligt at modellere forskellige mere eller mindre konkurrenceudsatte brancher overfor udlandet ved at variere E_j^X mellem brancherne. En relativ høj (lav) værdi af E_j^X betyder således en relativ høj (lav) grad af international konkurrence.

For at modellere re-eksport antages det at X_j er et aggregat af indenlandske og udenlandske varer:

$$X_i^D = \mu^{XD} \left(\frac{\left(1+\tau_i^{XD}\right) p_i}{P_i^{Ex}} \right)^{-E^{Ex}} X_i$$

$$X_i^F = \mu^{XF} \left(\frac{\left(1+\tau_i^{XF}\right) p_i^F}{P_i^{Ex}} \right)^{-E^{Ex}} X_i$$

$$P_i^{Ex} X_i = \left(1+\tau_i^{XD}\right) p_i X_i^D + \left(1+\tau_i^{XF}\right) p_i^F X_i^F$$

Afgifter til og fra udlandet samles i $TaxEu$

$$TaxEu = \sum_{k=x,c,g,x,im,ib,il} \sum_i \sum_j \tau_{ji}^{Cus,k} p_i^F k_{ji}^F + \sum_j subEU_j$$

hvor $\tau_{ji}^{Cus,k}$ er toldskattesatser. Alt opkrævet toldprovenu sendes til EU (toldunionen) mens indlandet modtager subsidier fra EU ved $subEU$.

2.5 Ligevægtsbetingelser

Som nævnt ovenfor indebærer ligevægt på arbejdsmarkedet at

$$\sum_j L_j = hN_L$$

Varemarkedsligevægten på det j'te marked er givet ved:

$$Y_j = \sum_i x_{ij}^D + c_j^D + g_j^D + \sum_{k=B,K} \sum_i I_{ij}^{kD} + I_j^{LD} + X_j^D$$

Er alle indkomststrømme i modellen afstemt konsistent, skulle der opnås balance overfor udlandet. Det vil sige, at værdien af nettoeksporten skal modsvare afkastet af udlandets nettoformue overfor hjemlandet. I den nuværende version af modellen kan denne balance udtrykkes som[8]

$$\sum_i \left[P_i^{Ex} X_i - p_i^F \left(X_i^F + c_i^F + I_i^{LF} + g_i^F + \sum_j \left(x_{ji}^F + \sum_{k=B,K} I_{ji}^{kF} \right) \right) \right]$$
$$= \frac{r-g}{1+g} \left[D^G - \bar{A} + \sum_i \left(D_i + \left(1 - \alpha_i^V\right) V_i \right) \right] - TaxEU$$

[8]Det er en god idé at tjekke denne balance ved kørsler med modellen. Balancen overfor udlandet kan ikke pålægges som en ligevægtsbetingelse, da denne følger af de øvrige ligevægtsbetingelser (Walras' lov).

3 Velfærdsanalyse

Nytte-mål for beskæftigede er givet ved:

$$U_L = \frac{y_L}{P^C} - u_h$$

hvor u_h er disnytten af arbejde (se evt. "Forbrugerens nyttemaksimering"). Antag, at vi i *grundforløbet* har værdierene y_L^0, u_h^0 og P_0^C og i et alternativ-forløb har værdierne y_L^1, u_h^1 og P_1^C. Ud fra dette kan vi definere et EV-mål (det antal kroner forbrugeren skal have for at syntes at grundforløb og alternativ er lige gode):

$$\frac{y_L^0 + EV_L}{P_0^C} - u_h^0 \equiv \frac{y_L^1}{P_1^C} - u_h^1$$

således at

$$\begin{aligned} EV_L &= \frac{P_0^C}{P_1^C} y_L^1 - y_L^0 - P_0^C \left(u_h^1 - u_h^0\right) \\ &= \frac{P_0^C - P_1^C}{P_1^C} y_L^1 + \left(y_L^1 - y_L^0\right) - P_0^C \left(u_h^1 - u_h^0\right) \end{aligned}$$

Nytte-målet for de ikke-beskæftigede er

$$U_{NL} = \frac{y_{NL}}{P^C}$$

og vi kan derfor på samme måde definere et EV-mål:

$$EV_{NL} = \left(y_{NL}^1 - y_{NL}^0\right) + \frac{P_0^C - P_1^C}{P_1^C} y_{NL}^1$$

Idet EV-målene er målt i kroner kan vi addere dem:

$$EV = EV_L + EV_{NL}$$

Vi definerer de 2 pris-effekter:

$$EV_L^P \equiv \frac{P_0^C - P_1^C}{P_1^C} y_L^1$$

og

$$EV_{NL}^P \equiv \frac{P_0^C - P_1^C}{P_1^C} y_{NL}^1$$

og den samlede pris-effekt er givet ved

$$EV^P = EV_N^P + EV_{NL}^P$$

Definer den samlede indkomst:

$$Y^{Tot} \equiv y_L + y_{NL}$$

således at det samlede EV-mål er givet ved:

$$EV = \left(Y_1^{Tot} - Y_0^{Tot}\right) + EV^P + EV^{Fri}$$

hvor

$$EV^{Fri} \equiv -P_0^C \left(u_h^1 - u_h^0\right)$$

Komponenten $\left(Y_1^{Tot} - Y_1^{Tot}\right)$ kan yderligere opdeles i producentoverskud, effekt af skatteændringer osv.

Det gælder at

$$
\begin{aligned}
Y^{Tot} &= (1-\tau^{w})\,whN_L + (1-\tau^{r})\,\frac{N_L}{M}\,(r-g)A/\,(1+g) + sN_L + \frac{N_L}{N_{pop}}\Delta T^{C} \\
&+ (1-\tau^{w})\,(N-N_L)\,\beta w + (1-\tau^{r})\,\frac{N_{pop}-N_L}{N_{pop}}\,(r-g)A/\,(1+g) + (1-\tau^{w})\,TR + s\,(N_{pop}-N_L) + \frac{N_{pop}}{N_{p}} \\
&= (1-\tau^{w})\,whN_L + (1-\tau^{r})\,(r-g)A/\,(1+g) \\
&+ (1-\tau^{w})\,(N-N_L)\,\beta w + (1-\tau^{w})\,TR + sN_{pop} + \Delta T^{C} \\
&= w\sum_j L_j + (r-g)A/\,(1+g) \\
&+ (N-N_L)\,\beta w + TR + sN_{pop} + \Delta T^{C} \\
&- \tau^{w}\left(w\sum_j L_j + (N-N_L)\,\beta w + TR\right) - \tau^{r}\,(r-g)A/\,(1+g)
\end{aligned}
$$

Bemærk at

$$
\begin{aligned}
wL + (r-g)A/\,(1+g) &= w\sum_j L_j + (r-g)\left(\overline{A} + \alpha^{V}\sum_j V_j\right)/\,(1+g) \\
&= w\sum_j L_j + (r-g)\sum_j V_j/\,(1+g) + (r-g)\left(\overline{A} - \left(1-\alpha^{V}\right)\sum_j V_j\right)/\,(1+g)
\end{aligned}
$$

Vi definerer løbende nettoindkomst ved:

$$
\begin{aligned}
Y^{N} &\equiv w\sum_j L_j + (r-g)\sum_j V_j/\,(1+g) \\
&= w\sum_j L_j + \sum_j DIV_j
\end{aligned}
$$

Nettoindkomsten er den nytte forbrugerne får via indkomst fra virksomhederne. Den offentlige branche indgår også i dette nyttemål, men kun via den købekraft ansættelse i den offentlige branche giver anledning til. Nytte af det offentlige forbrug er ikke medregnet. Vi definerer indkomst-effekten ved ændringen i nettoindkomsten:

$$EV^{I} = Y_1^N - Y_0^N$$

Vi definerer kapitalindkomst fra andet end indenlandske aktier ved:

$$Y^A \equiv (r-g)\left(\overline{A} - \left(1-\alpha^V\right)\sum_j V_j\right) / (1+g)$$

Vi har fradraget indkomsttab grundet udenlandsk ejerskab af danske aktier. Vi definerer et EV-mål svarende til dette indkomst-begreb:

$$EV^{A} = Y_1^A - Y_0^A$$

Bemærk at dette EV-mål grundlæggende måler nytteeffekten af udenlandsk ejerskab af danske aktier (idet $\overline{A}$ typisk ikke ændrer sig ved stød til modellen).

Vi definerer indkomst fra offentlige transfereringer ved

$$Y^{TR} \equiv (N - N_L)\beta w + TR + sN_{pop} + \Delta T^C$$

indkomstskat (negativ indkomst) ved

$$Y_w^{TAX} \equiv -\tau^w (wL + (N - N_L)\beta w + TR)$$

kapitalindkomstskat (negativ indkomst):

$$Y_r^{TAX} \equiv -\tau^r (r-g) A / (1+g)$$

For hver af disse defineres EV-mål:

$$EV^{TR} = Y_1^{TR} - Y_0^{TR}$$

$$EV_w^{TAX} = Y_{w1}^{TAX} - Y_{w0}^{TAX}$$

$$EV_r^{TAX} = Y_{r1}^{TAX} - Y_{r0}^{TAX}$$

Da det gælder at den samlede indkomst Y^{Tot} kan skrives som

$$Y^{Tot} = Y^N + Y^A + Y^{TR} + Y_w^{TAX} + Y_r^{TAX}$$

får vi et samlet EV-mål:

$$EV = EV^P + EV^I + EV^{Fri} + EV^A + EV^{TR} + EV_w^{TAX} + EV_r^{TAX}$$

Vi har derfor at EV-målet er summen af 7 led: pris-effekt (effekt af ændrede relative priser inkl. bytteforholdseffekter), indkomsteffekt (effekt af ændret bruttoindkomst), nytte af fritid, effekt af udenlandsk ejerskab, transfereringer samt skat på hhv. løbende indkomst og kapitalindkomst.

A Udledning af user cost

For at definere user-cost er det bedst at tage udgangspunkt i en dynamisk model. Vi opstiller problemet, løser det og finder ud af hvad kapitalens grænseprodukt skal være lig med i steady-state. Det er per definition user-cost i steady state.

Dividenden i den enkelte branche er givet ved:

$$\begin{aligned} DIV_j &= \left(1-\tau_j^{Cor}\right)\left(p_jY_j - P_j^M M_j - P_j^E E_j - (1+\tau_j^{fakL})wL_j - \tau_j^{fakB} P_j^B B_j/(1+g) - FakRest_j - iD_j\right) \\ &- \sum_{k=B,K} P_j^{Ik} I_j^k - P_j^{IL} I_j^L - SubEU_j + \tau_j^{Cor} \sum_{k=B,K} \delta_j^{k,Book} K_j^{k,Book}/(1+pg) + \frac{pg}{1+pg} D_j \end{aligned} \tag{A.1}$$

hvor i er nominel rente, τ^{Cor} er selskabsskat, D_t er virksomhedernes gæld, $\delta^{k,Book}$ er skattemæssige afskrivningsrate på kapitaltype $k = B,K$ og $K_t^{k,Book}$ er den dertil hørende bogførte værdi. Det sidste defineres ved:

$$K_t^{k,Book} = \left(1-\delta^{k,Book}\right) K_{t-1}^{k,Book} + P_t^{Ik} I_t^k \tag{A.2}$$

Desuden gælder den almindelige akkumulationsligning:

$$k_t = \left(1-\delta^k\right) k_{t-1} + I_t^k \tag{A.3}$$

Det ses af første linie i (**??**) at virksomhederne antages at kunne trække skattemæssige afskrivninger og renteudgifter fra i selskabsskatten. I 2. linie ses det at udgifterne til investeringer kun belaster de udbetalte dividenter i den udstrækning de overstiger de skattemæssige afskrivninger. Endelig viser den 3. linie effekten af ny låntagning.

Endogen gældskvote opstår kun i en model med usikkerhed (default risk) eller ad hoc antagelser om ikke-lineære låneomkostninger. Det antages derfor at virksomhederne har en fast gældskvote:

$$D_t = \phi \sum_{k=B,K} P_t^{Ik} k_t \tag{A.4}$$

Vi antager at virksomheden på tidspunkt t ønsker at maksimere virksomhedens værdi:

$$V_{t-1} = \sum_{s=t}^{\infty} DIV_s \left(\frac{1}{1+r} \right)^{1+s-t}$$

I dette tilfælde vil virksomheden i steady-state med konstant inflation π have user-cost :

$$P^k \equiv \frac{1}{1-\tau^{Cor}} \left[(1-\phi) \left(r + \delta^k \right) + \phi \left[\frac{\left(1-\tau^{Cor}\right) i - \pi}{1+\pi} + \delta^k \right] - \tau^{Cor} \delta^{k,Book} \frac{r+\delta^k}{i+\delta^{k,Book}} \right] P^{Ik} \tag{A.5}$$

hvor realrenten r er defineret ved

$$r \equiv \frac{i-\pi}{1+\pi}$$

Bemærk at hvis

$$\tau^{Cor} = 0$$

da gælder det at

$$P^k = \left(r + \delta^k \right) P^{Ik}$$

uanset hvad gældskvoten ϕ er.

Vi beviser (A.5) ved at beregne de optimale investeringer. Ved at løse (A.2) og (A.3) fås:

$$K_t^{k,Book} = \sum_{s=-\infty}^{t} P_s^{Ik} I_s^k \left(1 - \delta^{k,Book} \right)^{t-s}$$

$$k_t = \sum_{s=-\infty}^{t} I_s^k \left(1-\delta^k\right)^{t-s}$$

Det gælder derfor for $s \leq t$ at

$$\frac{\partial K_t^{k,Book}}{\partial I_s^k} = P_s^{Ik} \left(1-\delta^{k,Book}\right)^{t-s}$$

$$\frac{\partial k_t}{\partial I_s^k} = \left(1-\delta^k\right)^{t-s}$$

ellers gælder det at

$$\frac{\partial K_t^{k,Book}}{\partial I_s^k} = \frac{\partial k_t}{\partial I_s^k} = 0$$

Dividenten kan skrives på mere kompakt form:

$$\begin{aligned} DIV_t &= \left(1-\tau^{Cor}\right)\left(p_t Y_t - P_t^M M_t - P_t^E E_t - w_t L_t\right) \\ &- \sum_{k=B,K} (1-\phi) P_t^{Ik} I_t^k - \sum_{k=B,K} \beta_t^k P_{t-1}^{Ik} k_{t-1} + \beta^{k,Book} K_{t-1}^{Book} - P_t^{IL} I_t^L \end{aligned} \tag{A.6}$$

hvor

$$\beta_t^k \equiv \phi \left[\left(1-\tau^{Cor}\right) i + 1 - \left(1+\pi_t^{Ik}\right)\left(1-\delta^k\right)\right], \; \pi_t^{Ik} \equiv \frac{P_t^{Ik} - P_{t-1}^{Ik}}{P_{t-1}^{Ik}}$$

$$\beta^{k,Book} \equiv \tau^{Cor} \delta^{k,Book}$$

således at

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_{t-1}}{\partial I_s^k} &= \sum_{v=t}^{\infty} \frac{\partial DIV_v}{\partial I_s^k} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{1+v-t} \\
&= -(1-\phi) P_s^{Ik} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{1+s-t} \\
&+ \sum_{v=t}^{\infty} \left(\left(1-\tau^{Cor}\right) p_v \frac{\partial Y_v}{\partial k_{v-1}} \frac{dk_{v-1}}{dI_s^k} - \beta_v^k P_{v-1}^{Ik} \frac{dk_{v-1}}{dI_s^k} + \beta^{k,Book} \frac{dK_{v-1}^{k,Book}}{dI_s^k} \right) \left(\frac{1}{1+i}\right)^{1+v-t} \\
&= -(1-\phi) P_s^{Ik} \left(\frac{1}{1+i}\right)^{1+s-t} \\
&+ \sum_{v=s+1}^{\infty} \left(\left[\left(1-\tau^{Cor}\right) p_v \frac{\partial Y_v}{\partial k_{v-1}} - \beta_v^k P_{v-1}^{Ik} \right] \left(1-\delta^k\right)^{v-1-s} + \beta^{k,Book} P_s^{Ik} \left(1-\delta^{k,Book}\right)^{v-1-s} \right) \left(\frac{1}{1+i}\right)^{1+v-t} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

eller

$$(1-\phi) P_s^{Ik} = \varphi_s^k$$

hvor

$$\varphi_s^k \equiv \sum_{v=s+1}^{\infty} \left(\left[\left(1-\tau^{Cor}\right) p_v \frac{\partial Y_v}{\partial k_{v-1}} - \beta_v^k P_{v-1}^{Ik} \right] \left(1-\delta^k\right)^{v-1-s} + \beta^{k,Book} P_s^{Ik} \left(1-\delta^{k,Book}\right)^{v-1-s} \right) \left(\frac{1}{1+i}\right)^{v-s}$$

Lad os nu antage steady-state med konstant inflation π. Vi inflationskorrigerer φ_s^k:[9]

$$
\begin{aligned}
\varphi^k &= (1+\pi)^{-s} \sum_{v=s+1}^{\infty} \left(\left[\left(1-\tau^{Cor}\right) p (1+\pi)^v \frac{\partial Y_v}{\partial k_{v-1}} - \beta^k P^{Ik} (1+\pi)^{v-1} \right] \left(1-\delta^k\right)^{v-1-s} + \beta^{k,Book} (1+\pi)^s P^{Ik} \left(1-\delta^{k,Book}\right)^{v-1-s} \right) \left(\frac{1}{1+i}\right)^{v-s} \\
&= \sum_{v=s+1}^{\infty} \left(\left[\left(1-\tau^{Cor}\right) p \frac{\partial Y_v}{\partial k_{v-1}} - \beta^k P^{Ik} (1+\pi)^{-1} \right] \left(1-\delta^k\right)^{v-1-s} + (1+\pi)^{-1} \beta^{k,Book} (1+\pi)^{1+s-v} P^{Ik} \left(1-\delta^{k,Book}\right)^{v-1-s} \right) \left(\frac{1+\pi}{1+i}\right)^{v-s} \\
&= \sum_{v=s+1}^{\infty} \left(\left[\left(1-\tau^{Cor}\right) p \frac{\partial Y_v}{\partial k_{v-1}} - \beta P^{Ik} (1+\pi)^{-1} \right] \left(1-\delta^k\right)^{v-1-s} + (1+\pi)^{-1} \beta^{k,Book} P^{Ik} \left(\frac{1-\delta^{k,Book}}{1+\pi}\right)^{v-1-s} \right) \left(\frac{1+\pi}{1+i}\right)^{v-s}
\end{aligned}
$$

[9] Vi kan antage at $\partial Y_v / \partial K_{v-1}$ er konstant i et balanceret vækstforløb da produktionsfunktionen er antaget homogen af 1. grad

eller

$$\begin{aligned}
\varphi^{k} &= \frac{1+\pi}{1+i}\sum_{v=s+1}^{\infty}\left(\left[\left(1-\tau^{Cor}\right)p\frac{\partial Y_{v}}{\partial k_{v-1}}-\beta^{k}P^{Ik}\left(1+\pi\right)^{-1}\right]\left(1-\delta^{k}\right)^{v-(s+1)}+\left(1+\pi\right)^{-1}\beta^{k,Book}P^{Ik}\left(\frac{1-\delta^{k,Book}}{1+\pi}\right)^{v-(s+1)}\right)\left(\frac{1+\pi}{1+i}\right)^{v-(s+1)} \\
&= \frac{1+\pi}{1+i}\sum_{v=0}^{\infty}\left(\left[\left(1-\tau^{Cor}\right)p\frac{\partial Y_{v}}{\partial k_{v-1}}-\beta^{k}P^{Ik}\left(1+\pi\right)^{-1}\right]\left(1-\delta^{k}\right)^{v}+\left(1+\pi\right)^{-1}\beta^{k,Book}P^{Ik}\left(\frac{1-\delta^{k,Book}}{1+\pi}\right)^{v}\right)\left(\frac{1+\pi}{1+i}\right)^{v} \\
&= \frac{1+\pi}{1+i}\left(\left(\left[\left(1-\tau^{Cor}\right)p\frac{\partial Y_{v}}{\partial k_{v-1}}-\beta^{k}P^{Ik}\left(1+\pi\right)^{-1}\right]\sum_{v=0}^{\infty}\left(\left(1-\delta^{k}\right)\frac{1+\pi}{1+i}\right)^{v}+\left(1+\pi\right)^{-1}\beta^{k,Book}P^{Ik}\sum_{v=0}^{\infty}\left(\frac{1-\delta^{k,Book}}{1+i}\right)^{v}\right)\right) \\
&= \frac{1+\pi}{1+i}\left(\left(\left[\left(1-\tau^{Cor}\right)p\frac{\partial Y_{v}}{\partial k_{v-1}}-\beta^{k}P^{Ik}\left(1+\pi\right)^{-1}\right]\frac{1+i}{i-\pi+\left(1+\pi\right)\delta}+\left(1+\pi\right)^{-1}\beta^{k,Book}P^{Ik}\frac{1+i}{i+\delta^{k,Book}}\right)\right) \\
&= \left[\left(1-\tau^{Cor}\right)p\frac{\partial Y_{v}}{\partial k_{v-1}}\left(1+\pi\right)-\beta^{k}P^{Ik}\right]\frac{1}{i-\pi+\left(1+\pi\right)\delta^{k}}+\beta^{k,Book}P^{Ik}\frac{1}{i+\delta^{k,Book}}
\end{aligned}$$

gælder da at

$$\left(1-\phi\right)P^{Ik}=\left[\left(1-\tau^{Cor}\right)p\frac{\partial Y_{v}}{\partial k_{v-1}}\left(1+\pi\right)-\beta^{k}P^{Ik}\right]\frac{1}{i-\pi+\left(1+\pi\right)\delta^{k}}+\beta^{k,Book}P^{Ik}\frac{1}{i+\delta^{k,Book}}$$

således at

$$\left(1-\tau^{Cor}\right)p\frac{\partial Y_{v}}{\partial k_{v-1}}\frac{1+\pi}{i-\pi+\left(1+\pi\right)\delta^{k}}=\left(1-\phi\right)P^{Ik}+\beta^{k}P^{Ik}\frac{1}{i-\pi+\left(1+\pi\right)\delta^{k}}-\beta^{k,Book}P^{Ik}\frac{1}{i+\delta^{k,Book}}$$

eller

$$p\frac{\partial Y_{v}}{\partial k_{v-1}}=\frac{1}{1-\tau^{Cor}}\left[\frac{i-\pi+\left(1+\pi\right)\delta^{k}}{1+\pi}\left(1-\phi\right)P^{Ik}+\beta^{k}P^{Ik}\frac{1}{1+\pi}-\beta^{k,Book}P^{Ik}\frac{i-\pi+\left(1+\pi\right)\delta^{k}}{i+\delta^{k,Book}}\frac{1}{1+\pi}\right]$$

således at

$$p\frac{\partial Y_{v}}{\partial k_{v-1}}=\frac{1}{1-\tau^{Cor}}\left[\left(1-\phi\right)\left(\frac{i-\pi}{1+\pi}+\delta^{k}\right)+\phi\left[\frac{\left(1-\tau^{Cor}\right)i-\pi}{1+\pi}+\delta^{k}\right]-\tau^{Cor}\delta^{k,Book}\frac{\frac{i-\pi}{1+\pi}+\delta}{i+\delta^{k,Book}}\right]P^{Ik}$$

Indsættes $r=\left(i-\pi\right)/\left(1+\pi\right)$ fås usercost udtrykket ovenfor,

$$p\frac{\partial Y_v}{\partial k_{v-1}} = \frac{1}{1-\tau^{Cor}}\left[(1-\phi)\left(r+\delta^k\right)+\phi\left[\frac{\left(1-\tau^{Cor}\right)i-\pi}{1+\pi}+\delta^k\right]-\tau^{Cor}\delta^{k,Book}\frac{r+\delta^k}{i+\delta^{k,Book}}\right]P^{Ik}$$

B Vækst- og inflationskorrektion

Det er som regel en god ide at omskrive sin model til at være stationær. Dette kræver vækst- og inflationskorrektion. Vi vil derfor starte med at definere dette. Vi skelner mellem 3 typer variable: mængder, priser og værdier. En mængde er f.eks. produktionen, Y_j, i en branche eller input af materialer, M_j. Med pris mener vi prisen på en hvilken som helst ikke-fast faktor. Det kan f.eks. være output-prisen i en branche p_j. Selv om lønnen er prisen på arbejdskraft behandles den ikke som andre priser. Det skyldes at den er prisen på en fast faktor. Den vil derfor typisk indeholde både et vækst og et inflationselement, og opfører sig derfor som en værdi. Eksempler på værdier er det offentlige budget og husholdningernes formue.

Hvis vi betragter en steady state med vækstrate g og konstant inflation på π, vil mængder, priser og værdier opføre sig forskelligt. Mængderne vil vokse med vækstraten g, priserne vil vokse med vækstraten π og værdierne vil vokse med vækstarten $g+\pi$. Derfor vækstkorrigerer man mængder, inflationskorrigerer priser og vækst- og inflationskorrigerer værdier.

Lad os starte med vækstkorrektion. Til mængden X_t svarer en vækstkorrigeret variabel $\hat{X}_t$ defineret ved:

$$\hat{X}_t \equiv \frac{X_t}{(1+g)^t}$$

Lad os tage et eksempel. Betragt kapitalakkumulationsligningen

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1} + I_t \tag{B.1}$$

Definer de vækstkorrigerede variable

$$\hat{K}_t = \frac{K_t}{(1+g)^t}, \hat{I}_t = \frac{I_t}{(1+g)^t}$$

Det ses umiddelbart at

$$\frac{K_t}{(1+g)^t} = (1-\delta)\frac{K_{t-1}}{(1+g)^t} + \frac{I_t}{(1+g)^t}$$

Dette kan omskrives til:

$$\frac{K_t}{(1+g)^t} = (1-\delta)\frac{K_{t-1}}{(1+g)^{t-1}}\frac{1}{1+g} + \frac{I_t}{(1+g)^t}$$

således at

$$\hat{K}_t = (1-\delta)\hat{K}_{t-1}/(1+g) + \hat{I}_t$$

Dette er den vækstkorrigerede udgave af (B.1). For at blive fri for at markere alle variable med hatte benyttes følgende vækstkorrektions-slang. Vi siger at den vækstkorrigerede udgave af (B.1) er

$$K_t = (1-\delta)K_{t-1}/(1+g) + I_t$$

Den generelle regel for vækstkorrektion af lineære førsteordens differensligninger er: laggde variable deles med $1+g$ og leadede variable multipliceres med $1+g$.

Efter at have vækstkorrigeret kan vi antage at systemet er i en en stationary state:

$$K = (1-\delta)K/(1+g)+I$$

således at

$$(g+\delta)K/(1+g) = I$$

Det er denne relation man typisk vil vælge at at bruge i en steady state model.

Udviklingen i den offentlige branches gæld er et eksempel på vækst- og inflationskorrektion:

$$D_t^G = (1+i)D_{t-1}^G - S_t^P \tag{B.2}$$

hvor D_t^G er den offentlige gæld, S_t^P er den primære saldo og i er den nominelle rente. Både den offentlige gæld og det primære budget er værdier (nominelle størrelser). Definér de vækst- og inflationskorrigerede størrelser:

$$\overline{D}_t \equiv \frac{D_t}{(1+g)^t(1+\pi)^t}, \overline{S}_t^P \equiv \frac{S_t^P}{(1+g)^t(1+\pi)^t}$$

Vi omskriver (B.2) til:

$$\frac{D_t^G}{(1+g)^t(1+\pi)^t} = (1+i)\frac{D_{t-1}^G}{(1+g)^t(1+\pi)^t} - \frac{S_t^P}{(1+g)^t(1+\pi)^t}$$

således at

$$\frac{D_t^G}{(1+g)^t(1+\pi)^t} = (1+i)\frac{D_{t-1}^G}{(1+g)^{t-1}(1+\pi)^{t-1}}\frac{1}{(1+g)(1+\pi)} - \frac{S_t^P}{(1+g)^t(1+\pi)^t}$$

og dermed

$$\overline{D}_t^G = (1+i)\,\overline{D}_{t-1}^G \frac{1}{(1+g)\,(1+\pi)} - \overline{S}_t^P$$

Som det fremgår kan vi anvende samme form for slang som ovenfor. Den vækst- og inflations-korrigerede version af relationen (B.2) er givet ved:

$$D_t^G = (1+i)\,D_{t-1}^G \frac{1}{(1+g)\,(1+\pi)} - S_t^P$$

I stationary state giver dette:

$$D^G = (1+i)\,D^G \frac{1}{(1+g)\,(1+\pi)} - S^P$$

eller

$$(r-g)\,D^G / \,(1+g) = S^P$$

hvor realrenten r er givet ved

$$r \equiv \frac{i-\pi}{1+\pi}$$

Størrelsen $r-g$ er den vækstkorrigerede realrente.